An integral transform related to an operator in quantum mechanics on S^1 (Applications of the theory of reproducing kernels)

AUTHOR(S):

渡辺, 秀司

数理解析研究所講究録 1352 巻 2004 年 95-105

An integral transform related to an operator in quantum mechanics on S^1

———新たな Fourier 解析をめざして———

愛知工科大学・工学部　渡辺 秀司 (Shuji Watanabe)
Department of Electronics and Information Engineering
Aichi University of Technology

1　研究の目的

新たな Fourier 解析を以下で述べるように開発することによって, 従来の Fourier 解析が苦手とするような問題を扱えるようにすることが研究の目的である.

例 1.　関数 f と定数 k とが与えられたときに, たとえば微分方程式

$$-\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{k}{x^2}u+u=f, \qquad x\in\mathbb{R}$$

を満たす解 u を従来の Fourier 変換で探そうとすれば, 左辺第二項 ku/x^2 が障害になりうる. そこでもし左辺の第一項と第二項の和が, ある作用素 $\mathcal{D}$ の二乗になれば上の方程式は

$$-\mathcal{D}^2u+u=f$$

と変形されるので, 表面上から障害になる項が消える. よく知られているように, Fourier 変換は微分作用素 d/dx を掛け算作用素 iy $(y\in\mathbb{R})$ へと変換する. 同様にして, もし作用素 $\mathcal{D}$ を同じ掛け算作用素 iy へと変える変換 B(とその逆変換 B^{-1}) が存在したら, この方程式は

$$y^2Bu+Bu=Bf$$

となるので解の存在やその性質が調べやすくなる. 定数 k がゼロのときには作用素 D は微分作用素 d/dx になるので, このとき変換 B は Fourier 変換に一致する. だから変換 B は Fourier 変換の 1 つの拡張とみなせる. したがって, 項 ku/x^2 の存在は Fourier 変換にとっては障害になりうるが, この新たな変換 B にとってはむしろ歓迎すべきものになる.

例 2.　次に関数 f が与えられたときに, たとえば微分方程式

$$-\sin^2 x\frac{d^2u}{dx^2}-2\sin x\cos x\frac{du}{dx}-\frac{1-3\sin^2 x}{4}u+u=f, \qquad x\in(0,\,\pi)$$

を満たす解 u を考える. 今度は $x \in \mathbb{R}$ ではなく $x \in (0, \pi)$ なので, 従来の Fourier 級数で u を探そうとすれば, 左辺は扱いにくい. そこで左辺の第一項から第三項までの和がもし, ある作用素 $\mathcal{D}$ の二乗になれば上の方程式は

$$-\mathcal{D}^2 u + u = f$$

と変形される. (例 1 の $\mathcal{D}$ とは異なる) この作用素 $\mathcal{D}$ を掛け算作用素 iy $(y \in \mathbb{R})$ へと変える変換 W (とその逆変換 W^{-1}) がもし存在すれば, この方程式もまた

$$y^2 Wu + Wu = Wf$$

となるのでやはり扱い易い.

上の例 1, 例 2 のような新たな Fourier 解析を開発して, 従来の Fourier 解析が苦手とするような問題を扱えるようにすることが目的である. そしてこのような新たな Fourier 型の変換を用いて, 各々の作用素 $\mathcal{D}$ に関連する新たな Sobolev 型の空間を定義し, その埋め込み定理や Sobolev 型の不等式を証明する. 次に従来の Fourier 解析が苦手とするような偏微分方程式の初期値問題や境界値問題へ, それらを応用する.

2 例 2 における新たな Fourier 解析

この講究録では, 上の例 2 における新たな Fourier 解析の可能性についてご報告する. 例 1 における新たな Fourier 解析の詳細については, 文献 [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [13] をご覧戴きたい.

さて, 例 2 における作用素 $\mathcal{D}$ は次のものである:

$$\mathcal{D} = -\sin x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\cos x, \qquad x \in (0, \pi).$$

この作用素は Dirac formalism ([1], [4]) と呼ばれる手法による S^1 上の量子力学で登場している.

この講究録では, まず作用素 $-i\mathcal{D}$ が Hilbert 空間 $L^2(0, \pi)$ での自己共役作用素であることを証明し, そのスペクトルを解明する. 次に, この作用素を $y \in \mathbb{R}$ による掛け算作用素 y

$$y : U(y) \longmapsto yU(y), \qquad U \in D(y) = \left\{U \in L^2(\mathbb{R}) : yU \in L^2(\mathbb{R})\right\} \tag{2.1}$$

へ変えるユニタリ変換 $W : L^2(0, \pi) \to L^2(\mathbb{R})$ を構成する:

$$W(-i\mathcal{D})\, W^* = y.$$

この変換を用いて新たな Sobolev 型の空間を定義し, その埋め込み定理を証明する. 従来の Fourier 級数では扱いにくいような, いくつかの偏微分方程式の初期・境界値問題などへこれらの結果を応用して, 解の存在や一意性, 滑らかさなどの性質を明らかにする. そのうち, あるものについては解を explicit な形で書き下す.

3　例2における作用素の性質と積分変換 W

この節では例2における作用素 $-i\mathcal{D}$ が Hilbert 空間 $L^2(0,\,\pi)$ での自己共役作用素であることを証明し, そのスペクトルを解明する.

作用素 $\mathcal{D}$ の定義域と作用とを次のように定める:

$$\begin{aligned} D(\mathcal{D}) &= \left\{ u \in L^2(0,\,\pi) : u \sin x \in W_0^{1,2}(0,\,\pi) \right\}, \\ \mathcal{D}u &= -D(u \sin x) + \frac{1}{2} u \cos x, \quad u \in D(\mathcal{D}), \end{aligned}$$

ここに, Dv は v の弱導関数を表す. Fourier 級数に登場する関数 $\cos nx$ や $\sin nx$ (n は非負の整数) は $D(\mathcal{D})$ に属することに留意されたい.

Hille–Yosida の定理などを用いた直接的な計算により, 下の定理を示すことができる.

Theorem 3.1 ([14, Theorems 2.4, 2.5]). (i)　作用素 $-i\mathcal{D}$ は $D(\mathcal{D})$ を定義域として自己共役である.

(ii)　自己共役作用素 $-i\mathcal{D}$ は $\mathbb{R}$ に等しい連続スペクトルだけをもつ.

大貫–北門両教授 ([4]) は作用素 $-i\mathcal{D}$ の固有値問題

$$-i\mathcal{D}u_y = y u_y$$

を解いた. その結果, 任意の実数 y に対応する固有関数 u_y は

$$u_y(x) = C \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \exp\left[-iy \ln \tan \frac{x}{2} \right], \quad y \in \mathbb{R}, \quad x \in (0,\,\pi)$$

で与えられることが判明した. ここで, C は定数である. 我々の目的のためには, $C = 1/\sqrt{2\pi}$ と選ぶ, i.e.,

$$u_y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sin x}} \exp\left[-iy \ln \tan \frac{x}{2} \right], \quad y \in \mathbb{R}, \quad x \in (0,\,\pi).$$

この固有関数を用いて以下のような積分変換を考える:

$$Wu(y) = \int_0^\pi \overline{u_y(x)} u(x)\,dx, \quad u \in C_0^\infty(0,\,\pi), \tag{3.1}$$

$$\mathcal{W}U(x) = \int_{\mathbb{R}} u_y(x) U(y)\,dy, \quad U \in F^{-1}C_0^\infty(\mathbb{R}). \tag{3.2}$$

ここに, F は Fourier 変換であり, また $F^{-1}C_0^\infty(\mathbb{R})$ は逆 Fourier 変換による $C_0^\infty(\mathbb{R})$ の像である, i.e.,

$$F^{-1}C_0^\infty(\mathbb{R}) = \left\{ F^{-1}w : w \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \right\}.$$

$L^2(0,\,\pi)$, $L^2(\mathbb{R})$ の内積をそれぞれ $(\cdot,\,\cdot)$, $(\cdot,\,\cdot)_{\mathbb{R}}$ とするとき, 直ちに次の lemma を得る.

Lemma 3.2 ([14, Lemma 3.1]). (i) 変換 W は $C_0^\infty(0, \pi)$ から $F^{-1}C_0^\infty(\mathbb{R})$ の上への線形作用素であり,

$$(Wu, Wv)_{\mathbb{R}} = (u, v)\ , \qquad u, v \in C_0^\infty(0, \pi).$$

したがって, W は *one-to-one* である.
(ii) 変換 $\mathcal{W}$ は $F^{-1}C_0^\infty(\mathbb{R})$ から $C_0^\infty(0, \pi)$ の上への線形作用素であり,

$$(\mathcal{W}U, \mathcal{W}V) = (U, V)_{\mathbb{R}}\ , \qquad U, V \in F^{-1}C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

したがって, $\mathcal{W}$ は *one-to-one* である.

Lemma 3.3 ([14, Lemma 3.2]). 変換 W, $\mathcal{W}$ を上のものとする. このとき, $\mathcal{W} = W^{-1}$.

さて, $C_0^\infty(0, \pi)$ は $L^2(0, \pi)$ で dense であり, また $F^{-1}C_0^\infty(\mathbb{R})$ も $L^2(\mathbb{R})$ で dense であることに注意する. 故に変換 W の定義域を $L^2(0, \pi)$ 全体へ, そして値域を $L^2(\mathbb{R})$ 全体へと拡張することができる; 変換 W は今や $L^2(0, \pi)$ から $L^2(\mathbb{R})$ へのユニタリ作用素となった.

Theorem 3.4 ([14, Theorem 3.3]). 変換 W は $L^2(0, \pi)$ から $L^2(\mathbb{R})$ へのユニタリ作用素である.

Remark 3.1. 等式 (3.1) は任意の $u \in L^2(0, \pi)$ に対して成立するわけではない. 同様にして等式 (3.2) (ただし, $\mathcal{W}$ は W^* で置き換えられる) は任意の $U \in L^2(\mathbb{R})$ に対して成立するわけではない; 等式 (3.2) (ただし, $\mathcal{W}$ は W^* で置き換えられる) は $U \in D(y)$ (see (2.1)) に対しては成立することを次のものが示している.

Proposition 3.5 ([14, Proposition 3.4]). 定義域 $D(y)$ は(2.1) におけるそれとする. このとき, $U \in D(y)$ に対して

$$W^*U(x) = \int_{\mathbb{R}} u_y(x)U(y)\,dy \qquad (\text{a.e. } x \in [0, \pi])\,.$$

Hilbert 空間 $L^2(0, \pi)$ における自己共役作用素 $-i\mathcal{D}$ はユニタリ作用素 W によって Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R})$ における掛け算作用素 (自己共役作用素)y へ変換されることを以下の定理が示している.

Theorem 3.6 ([14, Theorem 3.6]).

$$W\,(-i\mathcal{D})\,W^* = y.$$

4 偏微分方程式への応用

この節では偏微分方程式の初期・境界値問題へ変換 W を応用して, 解を explicit な形で書き下す.

最初に $L^2(0, \pi)$ における以下の初期・境界値問題を扱う:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \sin^2 x \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sin x \cos x \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1 - 3\sin^2 x}{4} u, & t > 0, \quad x \in (0, \pi), \\ u(0, x) = f(x), \quad x \in (0, \pi). \end{cases} \tag{4.1}$$

初期値 $f \in C_0^\infty(0, \pi)$ を与えられたときに, 解 $u \in D(\mathcal{D}^2)$ を探す.

$$\mathcal{D}^2 = \sin^2 x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\sin x \cos x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1 - 3\sin^2 x}{4}$$

なので, 上の問題を次のように書き換える:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \mathcal{D}^2 u, \quad t > 0, \\ u(0) = f. \end{cases} \tag{4.2}$$

定理 3.6 に注意して問題 (4.2) に変換 W を施すと,

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = -y^2 U, \quad t > 0, \\ U(0) = Wf, \end{cases}$$

ここに, $U = Wu$. したがって,

$$U(t) = e^{-ty^2} Wf.$$

Proposition 3.5 に注意して W の逆変換を施せば, 解を explicit な形で書き下せる.

Corollary 4.1 ([14, Corollary 4.1]). 初期値を $f \in C_0^\infty(0, \pi)$ とする. このとき,

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t \sin x}} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{\sin \xi}} \exp\left[-\left(\ln \frac{\tan(\xi/2)}{\tan(x/2)} \right)^2 / (4t) \right] f(\xi)\, d\xi$$

なる *explicit* な形をした関数 u は初期・境界値問題 (4.1) の解である.

次に $L^2(0, \pi)$ における以下の初期・境界値問題を扱う:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sin^2 x \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sin x \cos x \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1 - 3\sin^2 x}{4} u, & t \in \mathbb{R}, \quad x \in (0, \pi), \\ u(0, x) = f(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x), \quad x \in (0, \pi). \end{cases} \tag{4.3}$$

初期値 $f,\ g \in C_0^\infty(0,\ \pi)$ を与えられたときに, 解 $u \in D(\mathcal{D}^2)$ を探す.
すぐ上の初期・境界値問題 (4.1) と同様にして,

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} = \mathcal{D}^2 u, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = f, \quad \dfrac{du}{dt}(0) = g. \end{cases} \tag{4.4}$$

定理 3.6 に注意して問題 (4.4) に変換 W を施すと,

$$\begin{cases} \dfrac{d^2U}{dt^2} = -y^2 U, \quad t \in \mathbb{R}, \\ U(0) = Wf, \quad \dfrac{dU}{dt}(0) = Wg, \end{cases}$$

ここに, $U = Wu$. したがって,

$$U(t) = Wf\ \cos yt + Wg\,\frac{\sin yt}{y}.$$

Proposition 3.5 に注意して W の逆変換を施せば, 解を explicit な形で書き下せる.

Corollary 4.2 ([14, Corollary 4.2]). 初期値を $f,\ g \in C_0^\infty(0,\ \pi)$ とし, また

$$x_\pm = 2\tan^{-1}\left(e^{\pm t}\tan\frac{x}{2}\right)$$

と置く. このとき,

$$\begin{aligned} u(t,\ x) &= \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\left\{f(x_+)\sqrt{\sin x_+} + f(x_-)\sqrt{\sin x_-}\right\} \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\int_{\ln\tan(x/2)-t}^{\ln\tan(x/2)+t} g\left(2\tan^{-1}e^\xi\right)\sqrt{\sin\left(2\tan^{-1}e^\xi\right)}\,d\xi \end{aligned}$$

なる *explicit* な形をした関数 u は初期・境界値問題 (4.3) の解である.

5 Dirac formalism に基づいた S^1 上の量子力学への応用

円周上 (一般的には, 何がしかの多様体上) のみを運動する量子力学的粒子を扱う手法として, Dirac formalism ([1], [4]) と呼ばれるものが知られている. この formalism においては粒子が円周上以外の場所に存在する確率はゼロである. したがって, この formalism では正準交換関係は設定できない. なぜならば, 正準交換関係の設定された量子力学では粒子はユークリッド空間全体に周く存在し, 円周上のみに一切のしみ出しなしに閉じ込められることは不可能だからである.

このような量子力学的粒子の運動量作用素として, 我々の作用素 $-i\mathcal{D}$ ([4]) が登場している. ここで, $\hbar = 1$ なる単位系を採用している. また, $x \in (0, \pi)$ ではなく $x \in (-\pi, \pi)$ であることに注意されたい. Theorem 3.1 とこれと同様な議論とにより, 次の corollary を得る.

Corollary 5.1 ([14, Corollaries 5.1, 5.2, 5.3]). (i) 運動量作用素 $-i\mathcal{D}$ は $\mathbb{R}$ に等しい連続スペクトルだけをもつ, $L^2(0, \pi)$ における自己共役作用素である.

(ii) 運動量作用素 $-i\mathcal{D}$ は $\mathbb{R}$ に等しい連続スペクトルだけをもつ, $L^2(-\pi, 0)$ における自己共役作用素である.

(iii) (i), (ii) により, 運動量作用素 $-i\mathcal{D}$ は $\mathbb{R}$ に等しい連続スペクトルだけをもつ, $L^2(-\pi, \pi) = L^2(0, \pi) \oplus L^2(-\pi, 0)$ における自己共役作用素である.

さて, Theorem 3.6 により, $L^2(0, \pi)$ における自己共役作用素 $-i\mathcal{D}$ は $L^2(\mathbb{R})$ における自己共役な掛け算作用素 y へ変換 W によって変換される. 全く同様にして, $L^2(-\pi, 0)$ における自己共役作用素 $-i\mathcal{D}$ も, $L^2(\mathbb{R})$ における自己共役な掛け算作用素 y へ変換される. したがって, $L^2(-\pi, \pi)$ における自己共役作用素 $-i\mathcal{D}$ は, $L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$ における自己共役な掛け算作用素 $y \oplus y$ へ変換される.

他方, 逆 Fourier 変換は $L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$ における自己共役な掛け算作用素 $y \oplus y$ を $L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$ における自己共役な微分作用素 $(-id/dx) \oplus (-id/dx)$ へ変換するので, 直ちに次の結果が得られる.

Corollary 5.2. $L^2(-\pi, \pi)$ における自己共役な運動量作用素 $-i\mathcal{D}$ は, $L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$ における自己共役な運動量作用素 $(-id/dx) \oplus (-id/dx)$ へユニタリ作用素によって変換される.

Remark 5.1. Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$ の元は 2 成分なので, それは直線 $\mathbb{R}$ 上を運動するスピン 1/2 の量子力学的粒子の状態を記述する波動関数と見なせるかもしれない. すなわち, この 2 成分はスピンの自由度に対応しているのかもしれない. あるいは, 陽子と中性子というアイソスピンの自由度に, あるいはまた, 左巻きの電子ニュートリノと左巻きの電子というウィークアイソスピンの自由度に対応しているのかもしれない. この解明が待たれる.

6 Sobolev 型の空間とその埋め込み定理

この節では, 変換 W を用いて作用素 $\mathcal{D}$ についての Sobolev 型の空間を定義し, その埋め込み定理を証明する.

Definition 6.1 ([15, Definition 1.7]).

$$\mathcal{H}^m(0, \pi) = \left\{ u \in L^2(0, \pi) : \int_{\mathbb{R}} \left(1 + |y|^2\right)^m |Wu(y)|^2 \, dy < \infty \right\},$$

ここに, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

容易に確かめられるように, このSobolev型の空間は内積

$$(u, v)_m = \int_{\mathbb{R}} \left(1 + |y|^2\right)^m Wu(y)\, \overline{Wv(y)}\, dy, \quad u, v \in \mathcal{H}^m(0, \pi),$$

ノルム $|u|_m = \sqrt{(u, u)_m}$ をもつHilbert空間になっている. 以下の性質が直接的な計算により示される:

Corollary 6.1 (**[15, Corollary 1.9]**). (i) $\mathcal{H}^0(0, \pi) = L^2(0, \pi)$.
(ii) $\mathcal{H}^{m'}(0, \pi) \subset \mathcal{H}^m(0, \pi), \quad m' \geq m$.
(iii) $|u|_m \leq |u|_{m'}, \quad u \in \mathcal{H}^{m'}(0, \pi), \quad m' \geq m$.
(iv) $\mathcal{H}^m(0, \pi) = D(\mathcal{D}^m)$.
(v) $\mathcal{H}^m(0, \pi) = W^* D(y^m)$.

我々の埋め込み定理は以下のものである:

Theorem 6.2 (**[15, Theorem 1.10]**). $\mathcal{H}^m(0, \pi) \subset C^{m-1}(0, \pi), \quad m = 1, 2, 3, \ldots$.

これは次のlemmaを使って証明できる.

Lemma 6.3 (**[15, Lemma 2.1]**). 関数uを$\mathcal{H}^m(0, \pi)$の元とし, また$k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$とする. このとき, $y^k Wu \in L^1(\mathbb{R})$.

7 Sobolev型の埋め込み定理の応用

関数$f \in L^2(0, \pi)$を与えられたときに, 次の境界値問題の解$u \in \mathcal{H}^2(0, \pi)$を探す:

$$-\sin^2 x \frac{d^2 u}{dx^2} - 2 \sin x \cos x \frac{du}{dx} - \frac{1 - 3\sin^2 x}{4} u + \lambda^2 u = f \quad \text{in} \quad (0, \pi), \tag{7.1}$$

ここに, $\lambda > 0$.

4節で触れたように

$$\mathcal{D}^2 = \sin^2 x \frac{d^2}{dx^2} + 2 \sin x \cos x \frac{d}{dx} + \frac{1 - 3\sin^2 x}{4}$$

なので, この問題を

$$-\mathcal{D}^2 u + \lambda^2 u = f \quad \text{in} \quad (0, \pi) \tag{7.2}$$

と書き換える.

$L^2(0, \pi)$, $\mathcal{H}^2(0, \pi)$のノルムをそれぞれ$\|\cdot\|$, $|\cdot|_2$と表す. 直接的な計算により, 次のcorollaryを得る.

Corollary 7.1 ([15, Corollary 3.1]). 関数 f を $L^2(0, \pi)$ の元とする．このとき，問題 (7.1) の解 $u \in \mathcal{H}^2(0, \pi)$ が一意に存在して，評価

$$|u|_2 \leq C \| f \|$$

が成立する．ここで，$C > 0$ は解 u によらない定数である．故に，解 u がデータ f に連続的に依存していることがわかる．そしてさらに，$u \in C^1(0, \pi)$.

関数 f をより狭い関数空間の元とすれば，上の解 u を explicit な形で書き下すことが可能になる．

Corollary 7.2 ([15, Corollary 3.3]). 関数 f を $C_0^\infty(0, \pi)$ の元とする．このとき，問題 (7.1) の解 $u \in \mathcal{H}^2(0, \pi)$ は

$$u(x) = \frac{1}{2\lambda\sqrt{\sin x}} \int_0^\pi \frac{f(\xi)}{\sqrt{\sin \xi}} \exp\left[-\lambda \left|\ln \tan \frac{\xi}{2} - \ln \tan \frac{x}{2}\right|\right] d\xi$$

なる形に *explicit* に表せる．

Proof. 等式 (7.2) に変換 W を施すと，

$$y^2 Wu + \lambda^2 Wu = Wf \qquad \text{in} \quad \mathbb{R}.$$

だから，

$$Wu = \frac{Wf}{y^2 + \lambda^2} \in D(y^2).$$

故に，問題 (7.1) の解 $u \in \mathcal{H}^2(0, \pi)$ が一意に存在することがわかる．Proposition 3.5 により，

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}} u_y(x) \frac{Wf(y)}{y^2 + \lambda^2} \, dy \qquad (\text{a.e. } x \in [0, \pi]).$$

他方，$f \in C_0^\infty(0, \pi)$ なので変換 W の定義式 (3.1) より

$$Wf(y) = \int_0^\pi \overline{u_y(\xi)} f(\xi) \, d\xi.$$

だから，Fubini の定理と公式

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{iy\eta} \frac{1}{y^2 + \lambda^2} \, dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\lambda|\eta|}}{\lambda}$$

とから corollary を得る． □

参考文献

[1] P.A.M. Dirac, *Lectures on quantum mechanics*, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York, 1964.

[2] J.A. Goldstein, *Semigroups of linear operators and applications*, Oxford University Press, New York, 1985/Clarendon Press, Oxford, 1985.

[3] Y. Ohnuki and S. Kamefuchi, *Quantum field theory and parastatistics*, University of Tokyo Press, Tokyo, 1982/Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1982.

[4] Y. Ohnuki and S. Kitakado, *Fundamental algebra for quantum mechanics on S^D and gauge potentials*, J. Math. Phys. **34** (1993), 2827–2851.

[5] Y. Ohnuki and S. Watanabe, *Self-adjointness of the operators in Wigner's commutation relations*, J. Math. Phys. **33** (1992), 3653 – 3665.

[6] M. Watanabe and S. Watanabe, *The explicit solution of a diffusion equation with singularity*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 383–389.

[7] S. Watanabe, *Sobolev type theorems for an operator with singularity*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 129 – 136.

[8] S. Watanabe, *An embedding theorem of Sobolev type for an operator with singularity*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 839–848.

[9] S. Watanabe, *The Calogero-Moser model, the Calogero model and analytic extension*, In: S. Saitoh, N. Hayashi and M. Yamamoto (eds.), *Analytic extension formulas and their applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[10] S. Watanabe, *The explicit solutions to the time-dependent Schrödinger equations with the singular potentials $k/(2x^2)$ and $k/(2x^2)+\omega^2x^2/2$*, Commun. Partial Differential Equations **26** (2001), 571–593.

[11] S. Watanabe, *A generalized Fourier transform and its applications*, Integral Transforms Spec. Funct. **13** (2002), 321–344.

[12] S. Watanabe, *Quantum mechanics on S^1 based on Dirac formalism*, Applicable Analysis **82** (2003), 25–34.

[13] S. Watanabe, *A space of Sobolev type for an operator with singularity*, Internat. J. Math. Sci. **2** (2003), 53–66.

[14] S. Watanabe, *An integral transform and its applications*, Integral Transforms Spec. Funct. **14** (2003), 537–549.

[15] S. Watanabe, *An embedding theorem of Sobolev type*, Integral Transforms and Special Functions, in press.